数理解析研究所講究録
944巻 1996年 190-198

ブラウン法(4次方程式)

日大生産工　平野菅保 (Sugayasu Hirano)

1　ブラウン法の計算手順

4次方程式　$x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$　(1)

の左辺を2つの2次多項式の積

$$\{x^2+(A+C)x+(B+D)\}\{x^2+(A-C)x+(B-D)\}=0$$

$$[\ (x^2+Ax+B)^2-(Cx+D)^2=0\ ] \qquad (2)$$

に変形する。方程式(2)の左辺を展開して得られる

$$x^4+2Ax^3\ \{A^2+(2B)-C^2\}x^2+(2AB-2CD)x$$
$$+(B^2-D^2)=0 \qquad (2')$$

と4次方程式(1)のxの次数の等しい項の係数を等しいとおき. 得られる4つの式を変形して4つの式(3)を得る。

$$\begin{array}{ll} 2A=a_3 & A=a_3/2 \\ A^2+(2B)-C^2=a_2 & C^2=(2B)+(a_3/2)^2-a_2 \\ 2AB-2CD=a_1 & 2CD=(a_3/2)(2B)-a_1 \\ B^2-D^2=a_0 & 4D^2=(2B)^2-4a_0 \end{array} \qquad (3)$$

(3)の第2式の左辺と第4式の左辺の積$C^2(4D^2)=4C^2D^2$は(3)の第3式の左辺の2乗$(2CD)^2=4C^2D^2$に等しいので、(2B)を変数とする次の3次方程式が得られる。

$$\{(2B)+(a_3/2)^2-a_2\}\{(2B)^2-4a_0\}$$
$$=\{(a_3/2)(2B)-a_1\}^2 \qquad (4)$$

解B_1, B_2, B_3の中の任意の解B_iを用いて、式(3)から次の①, ②のいずれかの方法でC_i, D_iを求める。

① $D_i=\sqrt{B_i^2-a_0}$ を用いて

$C_i=\{(a_3/2)(2B_i)-a_1\}/(2D_i)$

② $C_i=\sqrt{(2B_i)+\{(a_3/2)^2-a_2\}}$ を用いて

$D_i=\{(a_3/2)(2B_i)-a_1\}/(2C_i) \qquad (5)$

式(5)からC_i, D_iを求めるとき$\sqrt{\quad}$内の計算、$B_i^2-a_0$, $(2B_i)+\{(a_3/2)^2-a_2\}$でともに桁落ちがおきない場合は①, ②のどちらでC_i, D_iを求めてもよいが、桁落ちがおきた場合は桁落ちの桁数が少ない方を採用する。

2. 3次方程式の解と重根

上位の数桁が一致している近接根は、一致している数桁と等しい桁数で計算をすれば重根と同様な事柄がおこるので、ここでは重根のみをとりあげ、近接根については述べない。

4次方程式(1)が2つの2重根(例2)あるいは4重根(例3)を含む場合、3次方程式(4)の係数の間には次の関係

がある。 $a_3=0$ のとき $a_1=0$ $a_2^2=4a_0$

$a_3\neq 0$ のとき $a_2-(a_3/2)^2=2a_1/a_3$

$$\{a_2-(a_3/2)^2\}^2=4a_0=(2a_1/a_3)^2$$

となる。$(2\bar{B})=a_2-(a_3/2)^2$ とおくと、3次方程式(4)は

$$\{(2B)-(2\bar{B})\}^2\{(2B)+(2\bar{B})\}$$
$$=(a_3/2)^2\{(2B)-(2\bar{B})\}^2$$

$$\therefore\ \{(2B)-(2\bar{B})\}^2\{(2B)+(2\bar{B})-(a_3/2)^2\}=0 \qquad (6)$$

となり、4次方程式(1)が4重根を含むと

$$2a_2=3(a_3/2)^2 \qquad \therefore\ (2\bar{B})-(a_3/2)^2=-(2\bar{B})$$

$$\{(2B)-(2\bar{B})\}^3=0 \qquad (6')$$

となる。そこで、3次方程式(4)の解を求めるとき、2重根あるいは3重根の解を原点とする座標に座標変換をすることによって、単根と同様に、計算桁数にほぼ等しい有効桁数をもつ3次方程式(4)の重根の解を得る。

4次方程式(1)がもつ係数が条件(6)，(6')をともに満足しない場合は、3次方程式(4)をそのまま展開して解く。

$$(2B)^3-a_2(2B)^2+(a_3a_1-4a_0)(2B)+\{(4a_2-a_3^2)a_0-a_1^2\}=0 \qquad (7)$$

係数が条件(6)または(6')を満足する場合

① $(a_3/2)^2-a_2$ の計算で桁落ちをしない場合

$$|(a_3/2)^2-a_2|\geq min(|(a_3/2)^2|,\ |a_2|)$$

$\{(a_3/2)^2 - a_2\}^2 = 4a_0$ の条件として

$|\{(a_3/2)^2 - a_2\}^2 - 4a_0| < min(|\{(a_3/2)^2 - a_2\}^2|, |4a_0|)$

必要条件として

$|(a_3^2 - 4a_2)a_0| > |[(a_3/2)\{a_2 - (a_3/2)^2\} - a_1]^2|$

をともに満足する場合は次の変数変換 $(2B) \to (2B')$ をして3次方程式(4)を展開して解く。

$$(2B) = (2B') - (a_3/2)^2 + a_2$$

② $(a_3/2)^2 - a_2$ の計算で桁落ちをする場合

$|(a_3/2)^2 - a_2| < min(|(a_3/2)^2|, |a_2|)$

$(2a_1/a_3)^2 = 4a_0$ の条件として

$|(2a_1/a_3)^2 - 4a_0| < min(|(2a_1/a_3)^2|, |4a_0|)$

必要条件として $|a_2| > |(2a_1/a_3)|$

をともに満足する場合は次の変数変換 $(2B) \to (2B')$ をして3次方程式(4)を展開して解く。

$$(2B) = (2B') + (2a_1/a_3)$$

3. 2次方程式の係数

0次の係数の $B \pm D$ の計算で桁落ちをする場合

$|B \pm D| < min(|B|, |D|)$

$B \pm D = a_0/(B \mp D)$ 　　　複号同順　(8)

で求める。1次の係数の $A \pm C$ の計算で桁落ちをする場合

$|A \pm C| < min(|A|, |C|)$

更に $\{-(2B)+a_2\}$ の計算で桁落ちをしないとき

$$|-(2B)+a_2| \geq min(|(2B)|, |a_2|)$$

$$A \pm C = \{-(2B)+a_2\}/(A \mp C) \quad \text{複号同順} \quad (9)$$

$\{-(2B)+a_2\}$ の計算で桁落ちをするとき

$$|-(2B)+a_2| < min(|(2B)|, |a_2|)$$

すでに求められている0次の係数$(B \pm D)$を用いて

$$A \pm C = \{a_1-(A \mp C)(B \pm D)\}/(B \mp D) \quad \text{複号同順} \quad (10)$$

で求める。$[(A \pm C)(B \mp D)+(A \mp D)(B \pm D)=a_1$ による。$]$

4　例題

① 係数および計算途中の数値をすべて4つの解で表す。

② 計算途中の数値に含まれる項の中で、絶対値最大の項の最下位の桁より絶対値の小さい項は丸める。

③ 桁落ち誤差が入るときは、その大きさを表す誤差の項を加える。

例　1　　$|x_1| \gg |x_2| \gg |x_3| \gg |x_4|$

$a_3 \fallingdotseq -x_1 \quad a_2 \fallingdotseq x_1 x_2 \quad a_1 \fallingdotseq -x_1 x_2 x_3 \quad a_0 \fallingdotseq x_1 x_2 x_3 x_4$

$2B_1 \fallingdotseq x_1 x_2 \quad |x_1 x_4| \gg |x_2 x_3|$ のとき　$2B_3 \fallingdotseq x_1 x_4$

$2B_2 \fallingdotseq x_1 x_3 \quad |x_1 x_4| \ll |x_2 x_3|$ のとき　$2B_3 \fallingdotseq x_2 x_3$

$A \fallingdotseq -x_1/2 \quad B_1 \fallingdotseq (x_1 x_2)/2 \quad C_1 \fallingdotseq -x_1/2 \quad D_1 \fallingdotseq (x_1 x_2)/2$

$B_1+D_1 \fallingdotseq x_1 x_2$　(8) より　$B_1-D_1 \fallingdotseq a_0/(B_1+D_1) \fallingdotseq x_3 x_4$

$A+C_1 \fallingdotseq -x_1$　(10) より

$$A-C_1 \fallingdotseq \{a_1-(A+C_1)(B_1-D_1)\}/(B_1+D_1) \fallingdotseq -x_3$$

$A \fallingdotseq -x_1/2 \quad B_2 \fallingdotseq (x_1x_3)/2 \quad C_2 \fallingdotseq -x_1/2 \quad D_2 \fallingdotseq (x_1x_3)/2$

$B_2+D_2 \fallingdotseq x_1x_3$ （8）より $B_2-D_2 \fallingdotseq a_0/(B_2+D_2) \fallingdotseq x_2x_4$

$A+C_2 \fallingdotseq -x_1$ （9）より

$$A-C_2 \fallingdotseq \{-(2B_2)+a_2\}/(A+C_2) \fallingdotseq -x_2$$

$A \fallingdotseq -x_1/2 \quad B_3 \fallingdotseq (x_2x_3)/2 \quad C_3 \fallingdotseq x_1/2 \quad D_3 \fallingdotseq (x_2x_3)/2$

$B_3+D_3 \fallingdotseq x_2x_3$ （8）より $B_3-D_3 \fallingdotseq a_0/(B_3+D_3) \fallingdotseq x_1x_4$

$A-C_3 \fallingdotseq -x_1$ （9）より

$$A+C_3 \fallingdotseq \{-(2B_3)+a_2\}/(A-C_3) \fallingdotseq -x_2$$

例 2 2重根2つ $x_1=x_2=\alpha_1 t^\beta \quad x_3=x_4=\alpha_2 t^\beta$

$$a_3=-2(\alpha_1+\alpha_2)t^\beta \qquad a_2=(\alpha_1^2+4\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2)t^{2\beta}$$

$$a_1=-2\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)t^{3\beta} \quad a_0=\alpha_1^2\alpha_2^2t^{4\beta}$$

3次方程式(4)は次のようになる。

$$\{(2B)+(a_3/2)^2-a_2\}\{(2B)^2-4a_0\}$$

$$=\{(2B)-2\alpha_1\alpha_2t^{2\beta}\}^2\{(2B)+2\alpha_1\alpha_2t^{2\beta}\}$$

$$\{(a_3/2)(2B)-a_1\}^2=(\alpha_1+\alpha_2)^2\{(2B)-2\alpha_1\alpha_2t^{2\beta}\}^2$$

$$\{(2B)-2\alpha_1\alpha_2t^{2\beta}\}^2\{(2B)-(\alpha_1^2+\alpha_2^2)t^{2\beta}\}=0 \quad (11)$$

単根 $2B_1=(\alpha_1^2+\alpha_2^2)t^{2\beta}$ 　2重根 $2B_2=2\alpha_1\alpha_2t^{2\beta}$

$C_2^2=(2B_2)+(a_3/2)^2-a_2$ （計算桁数はnである。）

$$\fallingdotseq \{2\alpha_1\alpha_2+(\alpha_1+\alpha_2)^2-(\alpha_1^2+4\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2)\}t^{2\beta} \fallingdotseq \varepsilon_c t^{2\beta-n}$$

$C_2 \fallingdotseq \sqrt{\varepsilon_c}\, t^{\beta-n/2} \quad A\pm C_2 \fallingdotseq \{-(\alpha_1+\alpha_2)\pm\sqrt{\varepsilon_c}\, t^{-n/2}\}t^\beta$

$D_2^2=B_2^2-a_0=(\alpha_1^2\alpha_2^2-\alpha_1^2\alpha_2^2)t^{4\beta}\doteqdot\varepsilon_D t^{4\beta-n}$　ε_C, ε_Dは丸め誤差

$D_2\doteqdot\sqrt{\varepsilon_D}\,t^{2\beta-n/2}$　$B_2\pm D_2\doteqdot\{\alpha_1\alpha_2\pm\sqrt{\varepsilon_D}\,t^{-n/2}\}t^{2\beta}$

2つの2次方程式の係数 $A\pm C_2$, $B_2\pm D_2$ の有効桁数はすべて計算桁数の(1/2)になっており、2つの2次方程式に含まれるそれぞれの2つの解は別の2重根$\alpha_1 t^\beta$, $\alpha_2 t^\beta$である。

例 3　4重根　$x_1=x_2=x_3=x_4=\alpha t^\beta$

$a_3=-4\alpha t^\beta$　$a_2=6\alpha^2 t^{2\beta}$　$a_1=-4\alpha^3 t^{3\beta}$　$a_0=\alpha^4 t^{4\beta}$

3次方程式(4)は(11)より　[$\alpha_1=\alpha_2$]

$$\{(2B)-2\alpha^2 t^{2\beta}\}^3=0 \qquad (11')$$

3重根　$2B=2\alpha^2 t^{2\beta}$　　(計算桁数はnである。)

$C^2=(2B)+(a_3/2)^2-a_2=\{2\alpha^2+4\alpha^2-6\alpha^2\}t^{2\beta}\doteqdot\varepsilon_C t^{2\beta-n}$

$C\doteqdot\sqrt{\varepsilon_C}\,t^{\beta-n/2}$　$A\pm C\doteqdot\{-2\alpha\pm\sqrt{\varepsilon_C}\,t^{-n/2}\}t^\beta$

$D^2=B^2-a_0=(\alpha^4-\alpha^4)t^{4\beta}\doteqdot\varepsilon_D t^{4\beta-n}$　ε_C, ε_Dは丸め誤差

$D\doteqdot\sqrt{\varepsilon_D}\,t^{2\beta-n/2}$　$B\pm D\doteqdot\{\alpha^2\pm\sqrt{\varepsilon_D}\,t^{-n/2}\}t^{2\beta}$

2つの2次方程式の係数$A\pm C$　$B\pm D$の有効桁数はすべて計算桁数の(1/2)になっており、2つの2次方程式に含まれるそれぞれの2つの解はともに4重根αt^β である。

例 4　2重根を1つ、$x_1=\alpha_1 t^\beta$, $x_2=\alpha_2 t^\beta$, $x_3=x_4=\alpha_3 t^\beta$

$a_3=-(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)t^\beta$　$a_2=\{\alpha_1\alpha_2+2(\alpha_1+\alpha_2)\alpha_3+\alpha_3^2\}t^{2\beta}$

$a_1=-\{2\alpha_1\alpha_2+(\alpha_1+\alpha_2)\alpha_3\}\alpha_3 t^{3\beta}$　$a_0=\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2 t^{4\beta}$

$A=\{-(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)/2\}t^\beta$

単根　$B_1=\{(\alpha_1\alpha_2+\alpha_3^2)/2\}t^{2\beta}$

2重根　$B_2=[\{(\alpha_1+\alpha_2)\alpha_3+\varepsilon t^{-n/2}\}/2]t^{2\beta}$

$(\varepsilon/2)t^{2\beta-n/2}$は2重根による丸め誤差

$$D_2=\frac{1}{2}\left\{(\alpha_1-\alpha_2)\alpha_3+\frac{(\alpha_1+\alpha_2)}{(\alpha_1-\alpha_2)}\varepsilon t^{-n/2}\right\}t^{2\beta}$$

$$C_2=\frac{a_3B_2-a_1}{2D_2}=-\left\{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+\frac{\varepsilon}{(\alpha_1-\alpha_2)}t^{-n/2}\right\}t^{\beta}$$

$$\sqrt{(A+C_2)^2-4(B_2+D_2)}=\left\{(\alpha_1-\alpha_3)-\frac{\varepsilon}{(\alpha_1-\alpha_2)}t^{-n/2}\right\}t^{\beta}$$

$$-(A+C_2)=\left\{(\alpha_1+\alpha_3)+\frac{\varepsilon}{(\alpha_1-\alpha_2)}t^{-n/2}\right\}t^{\beta}$$

$x_1=\alpha_1 t^{\beta}$　　$x_3=[\alpha_3+\{\varepsilon/(\alpha_1-\alpha_2)\}t^{-n/2}]t^{\beta}$

$$\sqrt{(A-C_2)^2-4(B_2-D_2)}=\left\{(\alpha_2-\alpha_3)+\frac{\varepsilon}{(\alpha_1-\alpha_2)}t^{-n/2}\right\}t^{\beta}$$

$$-(A-C_2)=\left\{(\alpha_2+\alpha_3)-\frac{\varepsilon}{(\alpha_1-\alpha_2)}t^{-n/2}\right\}t^{\beta}$$

$x_2=\alpha_2 t^{\beta}$　　$x_4=[\alpha_3-\{\varepsilon/(\alpha_1-\alpha_2)\}t^{-n/2}]t^{\beta}$

単根α_1t^{β}, α_2t^{β}は丸め誤差εが消失している。

例　5　3重根　$x_1=\alpha_1t^{\beta}$　　$x_2=x_3=x_4=\alpha_2t^{\beta}$

$a_3=-(\alpha_1+3\alpha_2)$　　　$a_2=3(\alpha_1+\alpha_2)\alpha_2t^{2\beta}$

$a_1=-(3\alpha_1+\alpha_2)\alpha_2^2t^{3\beta}$　　$a_0=\alpha_1\alpha_2^3t^{4\beta}$

$A = -\{(\alpha_1 + 3\alpha_2)/2\} t^{\beta}$

$B \doteqdot [\{(\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_2 + \varepsilon t^{-n/3}\}/2] t^{2\beta}$

$(\varepsilon/2) t^{2\beta - n/3}$ は3重根による丸め誤差

$$C \doteqdot \left\{ \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{2} + \frac{\varepsilon}{(\alpha_1 - \alpha_2)} t^{-n/3} - \frac{\varepsilon^2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^3} t^{-2n/3} \right\} t^{\beta}$$

$$D = (2CD)/(2C) = (a_3 B - a_1)/(2C)$$

$$\doteqdot -\left\{ \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_2}{2} + \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\varepsilon}{2(\alpha_1 - \alpha_2)} t^{-n/3} - \frac{\alpha_1 \varepsilon^2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^3} t^{-2n/3} \right\} t^{2\beta}$$

$$\sqrt{(A-C)^2 + 4(B-D)}$$

$$\doteqdot \left\{ (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\varepsilon}{(\alpha_1 - \alpha_2)} t^{-n/3} + \frac{\varepsilon^2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^3} t^{-2n/3} \right\} t^{\beta}$$

$$-(A - C) = \left\{ (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\varepsilon}{(\alpha_1 - \alpha_2)} t^{-n/3} - \frac{\varepsilon^2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^3} t^{-2n/3} \right\} t^{\beta}$$

$$x_1 = \alpha_1 t^{\beta} \qquad x_2 = \left\{ \alpha_2 + \frac{\varepsilon}{(\alpha_1 - \alpha_2)} t^{-n/3} - \frac{\varepsilon^2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^3} t^{-2n/3} \right\} t^{\beta}$$

単根の x_1 は丸め誤差 ε を含んでいない。次の x_3, x_4 は減算 $(A+C)^2 - 4(B+D)$ による桁落ち丸め誤差 $\bar{\varepsilon}$ を含む。

$$x_3 = \left\{ \alpha_2 - \frac{(1 - \sqrt{-3})\varepsilon}{2(\alpha_1 - \alpha_2)} t^{-n/3} + \frac{6\varepsilon^3 - \sqrt{-3}(\alpha_1 - \alpha_2)^4 \bar{\varepsilon}}{12\varepsilon(\alpha_1 - \alpha_2)^3} t^{-2n/3} \right\} t^{\beta}$$

$$x_4 = \left\{ \alpha_2 - \frac{(1 + \sqrt{-3})\varepsilon}{2(\alpha_1 - \alpha_2)} t^{-n/3} + \frac{6\varepsilon^3 + \sqrt{-3}(\alpha_1 - \alpha_2)^4 \bar{\varepsilon}}{12\varepsilon(\alpha_1 - \alpha_2)^3} t^{-2n/3} \right\} t^{\beta}$$